數學傳播 33卷4期, pp. 83-86

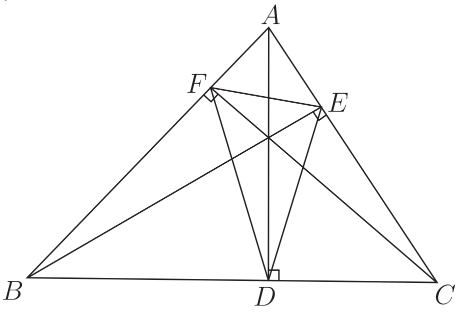
關聯三角形內外徑之間的幾何性質

丁遵標

摘要: 本文獲得了與垂足三角形相關聯的三角形內外徑之間的兩個幾何性質, 並進行推論。

關鍵詞: 四點共圓、三角形、垂足三角形、內徑、外徑。

給定 $\triangle ABC$, 作 $AD\perp BC$ 於 D, $BE\perp AC$ 於 E, $CF\perp AB$ 於 F, 連接 DEF 得到 $\triangle DEF$, 則 $\triangle DEF$ 稱之爲 $\triangle ABC$ 的垂足三角形。經過探討, 筆者現已得到與垂足三角形相關聯的三角形內外徑之間的兩個有趣的幾何性質。



定理 1: 若 $\triangle DEF$ 是銳角 $\triangle ABC$ 的垂足三角形。且 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\triangle AEF$、$\triangle BDF$、$\triangle CDE$、$\triangle DEF$、$\triangle ABC$ 的外徑分別爲 R_A、R_B、R_C、R_0、R, 內徑爲 r_A、r_B、r_C、r_0、r。

則有: $r_AR_A+r_BR_B+r_cR_C=r(R-r_0)$

證明: 利用四點共圓的性質得到

$$EF=a\cos A \qquad FD=b\cos B \qquad DE=c\cos C.$$

讀者可通過網站: http: //zhidao.baidu.com/question/67427277.html 了解其證明過程。

在 $\triangle AEF$ 中, $R_A=\dfrac{EF}{2\sin A}=\dfrac{a\cos A}{2\sin A}=\dfrac{2R\sin A\cos A}{2\sin A}=R\cos A$

$\therefore\ \cos A=\dfrac{R_A}{R}$

同理
$$\cos B=\frac{R_B}{R} \qquad \cos C=\frac{R_C}{R} \tag{1}$$

又 $AE=c\cos A \qquad AF=b\cos A$

記 $\triangle ABC$ 的半周長爲 P

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}r_A(EF+EA+FA)=\frac{1}{2}r_A(a+b+c)\cos A$$
$$=\frac{1}{2}r_A\cdot 2P\cos A=r_AP\cos A.$$

同理 $S_{\triangle BDF}=r_BP\cos B \qquad S_{\triangle CDE}=r_cP\cos C$

$$\because\ a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{2S}{R}=\frac{2rP}{R} \tag{2}$$

$$\therefore\ S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}r_0(EF+FD+DE)$$
$$=\frac{1}{2}r_0(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$$
$$=\frac{1}{2}r_0\cdot\frac{2rP}{R}=\frac{r_0rP}{R}$$

$$\because\quad S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CDE}+S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ABC}$$

$$\therefore\quad r_AP\cos A+r_BP\cos B+r_CP\cos C+\frac{r_0rP}{R}=rP$$

即 $$r_A\cos A+r_B\cos B+r_c\cos C=r-\frac{r_0r}{R} \tag{3}$$

由 (1)、(3) 得

$$r_A\cdot\frac{R_A}{R}+r_B\cdot\frac{R_B}{R}+r_c\cdot\frac{R_C}{R}=r\Big(1-\frac{r_0}{R}\Big)$$

故 $r_AR_A+r_BR_B+r_CR_C=r(R-r_0)$。

至此, 定理 1已給出了完整的證明, 但在證明過程中的等式 (2) 簡潔有趣, 現給出它的證明, 供同學們學習時參考。

註記: 由海倫公式 $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ 易得

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)=16S^2$$

由餘弦定理得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\quad \cos c=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\therefore\ a\cos A+b\cos B+c\cos C=a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$$

$$= \frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{2abc}$$
$$= \frac{16S^2}{2abc} = \frac{8S^2}{abc}$$

由 $S = \dfrac{abc}{4R}$ 得 $abc = 4RS$

$\therefore\ a\cos A + b\cos B + c\cos C = \dfrac{2S}{R}$

定理2: 若 $\triangle DEF$ 是銳角 $\triangle ABC$ 的垂足三角形, 且 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\triangle ABC$ 的外徑與內徑分別爲 R、r, $\triangle DEF$ 的外徑與內徑分別爲 R_0、r_0, 則有

(1) $R = 2R_0$

(2) $r_0 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4R} - 2R$

證明: (1) $\because$ A、C、D、F 與 D、E、A、B 四點共圓

$$\therefore\ \angle EDC = \angle A \qquad \angle FDB = \angle A$$
$$\therefore\ \angle EDF = 180^\circ - \angle EDC - \angle FDB = 180^\circ - 2\angle A$$
$$\because a = 2R\sin A.$$

在 $\triangle DEF$ 中

$$R_0 = \frac{EF}{2\sin\angle EDF} = \frac{a\cos A}{2\sin(180^\circ - 2A)} = \frac{2R\sin A\cos A}{2\sin 2A} = \frac{1}{2}R$$

故 $R = 2R_0$.

(2) 記 $\triangle DEF$、$\triangle AEF$、$\triangle BDF$、$\triangle CDE$、$\triangle ABC$ 的面積分別爲 S_0、S_1、S_2、S_3、S

$\because\ \triangle AEF \backsim \triangle ABC \qquad \therefore\ \dfrac{S_1}{S} = \left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 A$

$\therefore\ S_1 = S\cos^2 A$

同理: $S_2 = S\cos^2 B$, $S_3 = S\cos^2 C$

$$\begin{aligned}\therefore\ S_0 &= S - S_1 - S_2 - S_3\\ &= (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)S\\ &= (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2)S\\ &= \left[\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 - 2\right]S\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2} - 2\right)S \tag{4}$$

又 $\because\ S_0 = \dfrac{1}{2}r_0(DE+EF+FD)$

$$= \frac{1}{2}r_0(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$$

$$= \frac{1}{2}r \cdot \frac{2S}{R} = \frac{r_0 S}{R} \tag{5}$$

由 (4)、(5) 得

$$\frac{r_0 S}{R} = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2} - 2\right)S$$

故 $r_0 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4R} - 2R$

在此基礎上, 我們來作進一步的探討:

由於 $a^2+b^2+c^2 = 2(P^2-4Rr-r^2)$

於是 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4R} - 2R = \dfrac{P^2-4Rr-r^2}{2R} - 2R$

結合 Gerretsen 不等式:

$$16Rr - 5r^2 \le P^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$$

進一步得到:

$$\frac{16Rr-5r^2-4Rr-r^2}{2R} - 2R \le r_0 \le \frac{4R^2+4Rr+3r^2-4Rr-r^2}{2R} - 2R$$

$$\text{即}\ \ 6r - 2R - \frac{3r^2}{R} \le r_0 \le \frac{r^2}{R}$$

這樣, 我們便可得到:

推論 1: $6r - 2R - \dfrac{3r^2}{R} \le r_0 \le \dfrac{r^2}{R}$

再結合 Euler 不等式 $R \ge 2r$, 又可得到:

推論 2: $r \ge 2r_0$

參考文獻

1. 丁遵標, 一個有趣的幾何不等式 (J), 中學數學月刊, Vol.10, p.19, 2001。

—本文作者任教中國安徽省舒城縣杭埠鎮中心學校—